

CONCEITOS E PRINCÍPIOS BÁSICOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA EM CIÊNCIAS FLORESTAIS

JOSÉ ANTÔNIO ALEIXO DA SILVA¹

¹Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, Pernambuco.

Autor para correspondência: jaaleixo@uol.com.br

Resumo: O presente artigo trata-se de uma revisão de princípios básicos de modelagem matemática volumétrica e de crescimento em Ciências Florestais que constitui um importante aspecto que deve ser considerado em planos de manejo florestal sustentável.

Palavras chaves: Modelos de crescimento, modelos lineares, modelos múltiplos, modelos não lineares.

CONCEPTS AND BASIC PRINCIPLES ON MATHAMETICAL MODELLING IN FORESTRY SCIENCES

Abstract: This paper is a review of basic concepts and principles of volumetric and growth mathematical modeling in Forest Sciences which constitutes an important aspect that should be considered in sustainable forest management plans.

Index terms: Growth models, linear models, multiple models, nonlinear models.

Modelo é uma formulação matemática baseada em hipóteses que tenta representar fenômenos físicos ou biológicos, com a finalidade de gerar uma equação que possa estimar quantitativamente tal(is) fenômeno(s) a um determinado nível de probabilidade .

O modelo em sua a forma analítica que é composto de variáveis (dependentes e independentes), parâmetros e um erro associado, quando se trata de modelo probabilístico, por exemplo:

$$V_i = \beta_0 + \beta_1 DAP_i + \beta_2 H_i + \epsilon_i$$

Em que:

V_i = volume da árvore i ;
 DAP_i = diâmetro a altura do peito da árvore i ;
 H_i = altura da árvore i ;
 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ = parâmetros do modelo;
 ϵ_i = erro aleatório

O erro aleatório ϵ_i confere ao modelo a natureza probabilística, isto é, esse é influenciado por situações não controláveis, que quanto mais ocorrerem menor será a precisão do modelo.

Os modelos matemáticos somente representam um conjunto de suposições físicas ou biológicas. Essas suposições são sempre simplificações da realidade (FRANCE; THORNLEY, 1984). Na maioria das vezes esses modelos denominados de matemáticos não se preocupam com a natureza do fenômeno, buscam apenas conseguir bons ajustes.

Nas ciências, os modelos matemáticos são muito importantes e usam uma ferramenta especial: as equações, sendo que um modelo de crescimento pode abranger um sistema de equações, sendo capaz de prognosticar o crescimento e a produção sob várias condições (SPATHELF; NUTTO, 2000).

Existem também os modelos determinísticos que são aqueles em que o erro aleatório não existe, pois caso o fenômeno se repita n vezes o resultado será sempre o mesmo. Exemplo:

$$V_f = V_i (1 + i)^t$$

Em que:

V_f = valor final;

V_i = valor inicial;

i = taxa de juros;

t = tempo de aplicação de V_i .

A equação já é a representação numérica do modelo, isto é, o resultado final do ajuste do modelo ao conjunto de dados. É, portanto a estimativa do modelo e é composta de coeficientes e sem a estrutura de erro, pois em sua dedução se assume que a somatória dos erros é igual zero.

$$\hat{V}_i = b_0 + b_1 DAP + b_2 H$$

Em que:

\hat{V}_i = estimativa do volume;

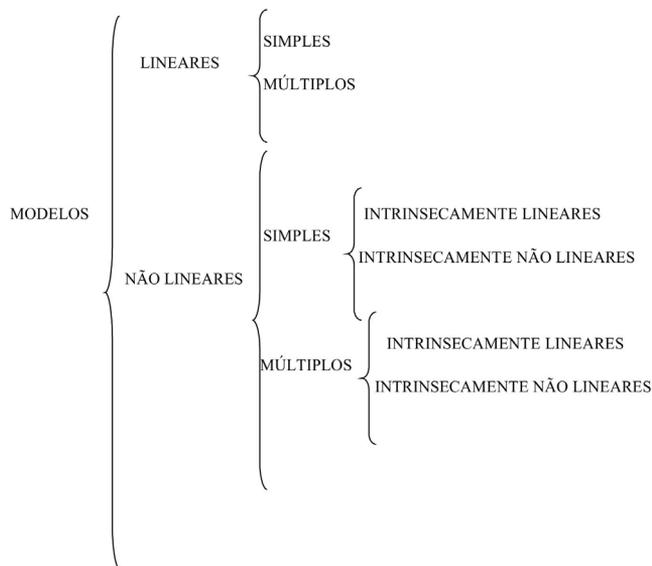
b_0, b_1 e b_2 = coeficientes (estimadores dos parâmetros)

Uma equação só deve ser aplicada para o conjunto de valores dos respectivos domínios em que ela foi gerada, pois o uso de extrapolações, isto é, fazer estimativas fora do domínio dos dados em que a equação foi ajustada, pode-se gerar resultados inconsistentes.

Um erro bastante comum que se comete é aplicar equações desenvolvidas em outros locais ou regiões, mesmo que sejam aplicadas na mesma espécie florestal, pois existem inúmeros fatores que podem alterar os valores dos coeficientes.

Um prática comum utilizadas é se fazer um teste de validação, no qual se coleta um banco de dados para o local e se aplica a equação desenvolvida em outro local e por meio de um teste estatístico testa a hipótese de nulidade, isto é, que a equação pode ser aplicada em tal local. Um prática mais precisa consiste em usar a estrutura do modelo usado na outra região e ajustá-lo aos dados do local, gerando-se assim equação específica para tal local.

Os modelos podem ser classificados em (SILVA; SILVA, 1995):



Exemplos:

Modelo linear simples

$$V_i = \beta_0 + \beta_1 \text{DAP}^2 H_i + \epsilon_i \text{ (Modelo de Spurr)}$$

Modelo linear múltiplo

$$V_i = \beta_0 + \beta_1 \text{DAP} + \beta_2 H_i + \epsilon_i$$

Modelo não linear simples, intrinsecamente linear

$$V_i = \beta_0 + \beta_1 (\text{DAP}^2 H_i) \cdot \epsilon_i$$

Logaritmizando ambos os dados, tem-se:

$$\ln V_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln(\text{DAP}^2 H_i) + \ln \epsilon_i$$

$$V'_i = \beta'_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \epsilon'_i \quad \ln V_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln(\text{DAP}^2 H_i) + \ln \epsilon_i$$

Em que:

$$V'_i = \ln V_i$$

$$\beta'_0 = \ln \beta_0$$

$$X_1 = \ln(\text{DAP}^2 H_i)$$

$$\epsilon'_i = \ln \epsilon_i$$

Modelo não linear simples, intrinsecamente não linear

$$V_i = \beta_0 \cdot (\text{DAP}^2 H_i)^{\beta_1} \cdot \epsilon_i$$

Modelo não linear múltiplo, intrinsecamente linear

$$V_i = \beta_0 \text{DAP}_i^{\beta_1} H_i^{\beta_2} \epsilon_i \text{ (Modelo de Schumacher e Hall)}$$

$$\ln V_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln \text{DAP}_i + \beta_2 \ln H_i + \ln \epsilon_i$$

$$V'_i = \beta'_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ln \epsilon_i$$

Em que:

$$X_1 = \ln \text{DAP}_i$$

$$X_2 = \ln H_i$$

Modelo não linear múltiplo, intrinsecamente não linear

$$V_i = \beta_0 + \text{DAP}_i^{\beta_1} + H_i^{\beta_2} + \epsilon_i$$

Observa-se que nos modelos intrinsecamente não lineares não pode

transformá-los em lineares pelo uso de logaritmos ou transformação de variáveis, sendo necessário uso de procedimentos de cálculo numérico para se obter as estimativas dos parâmetros que compõem o(s) modelo(s).

Nos modelos lineares e não lineares intrinsecamente lineares, as estimativas dos parâmetros, geralmente, são obtidas pelo emprego do método dos mínimos quadrados (SILVA; SILVA, 1982).

Vale ressaltar que por conceituação, modelos do tipo:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3 + \epsilon_i$$

São lineares, pois a linearidade de um modelo é caracterizada pela estrutura de seus parâmetros e não de sua(s) variável(is) independente(s).

Entretanto, dependendo da área de atuação, um mesmo tipo de modelo pode ter diferentes nomes.

Segundo Ferreira (2004), modelo é uma representação informal baseado em descrições formais de objetos, e que permite, por meio de variações, simular os efeitos de mudanças do fenômeno que representa. O mesmo autor afirma que a modelagem conceitual é a etapa da análise de um “sistema”, na qual são definidos os recursos, itens de dados e suas inter-relações.

Valentin e Guimarães (2004) definem que modelos são formas simplificadas de representar a realidade.

Segundo Bertalaffy (1969) modelo é um “sistema” que pode ser definido como um conjunto de elementos que se inter-relacionam. Inter-relação significa que alguns elementos (p) mantêm relações com R, de forma tal que o comportamento de um elemento p é diferente de seu comportamento em outra relação R.

Dependendo da natureza dos dados, existem vários tipos de modelos:

Modelo físico: conjunto de hipóteses sobre a estrutura ou comportamento de um sistema físico pelo qual se procuram explicar ou prever, dentro de uma teoria científica as propriedades de um sistema (FERREIRA, 2004).

Modelo dinâmico: são aqueles que utilizam equações diferenciais que podem ser resolvidas de forma analítica ou numérica, sendo que as estimativas e/ou simulações são realizadas em função do tempo (VALENTIN; GUIMARÃES, 2004).

Modelo estático: não incorporam a variável tempo, pois são representativos

de uma situação em um determinado momento (HANNON; RUTH, 1997).

Os modelos empíricos ou de prognose não consideram hipóteses associadas à casualidade. No pressuposto dessa abordagem, é que se encontram padrões comuns no crescimento de indivíduos. Neste tipo de modelo a floresta é vista como um sistema para a produção (SPATHELF; NUTTO, 2000).

Tais modelos tentam representar, indiretamente, o efeito do ambiente e das práticas silviculturais no desenvolvimento das árvores de um povoamento florestal, utilizando fontes de variação como o sítio, a área basal e a idade. Modelos com propriedades biológicas e amparados numa amostragem adequada, com informações precisas e remedições, propiciam prognoses do crescimento e da produção florestal com elevado grau de confiabilidade. A partir deles se podem prescrever regimes de manejo adequados para cada espécie, em cada sítio, que visem à qualidade do produto final como desbastes, rotação econômica ótima e planejamento da colheita (ABREU et al, 2002).

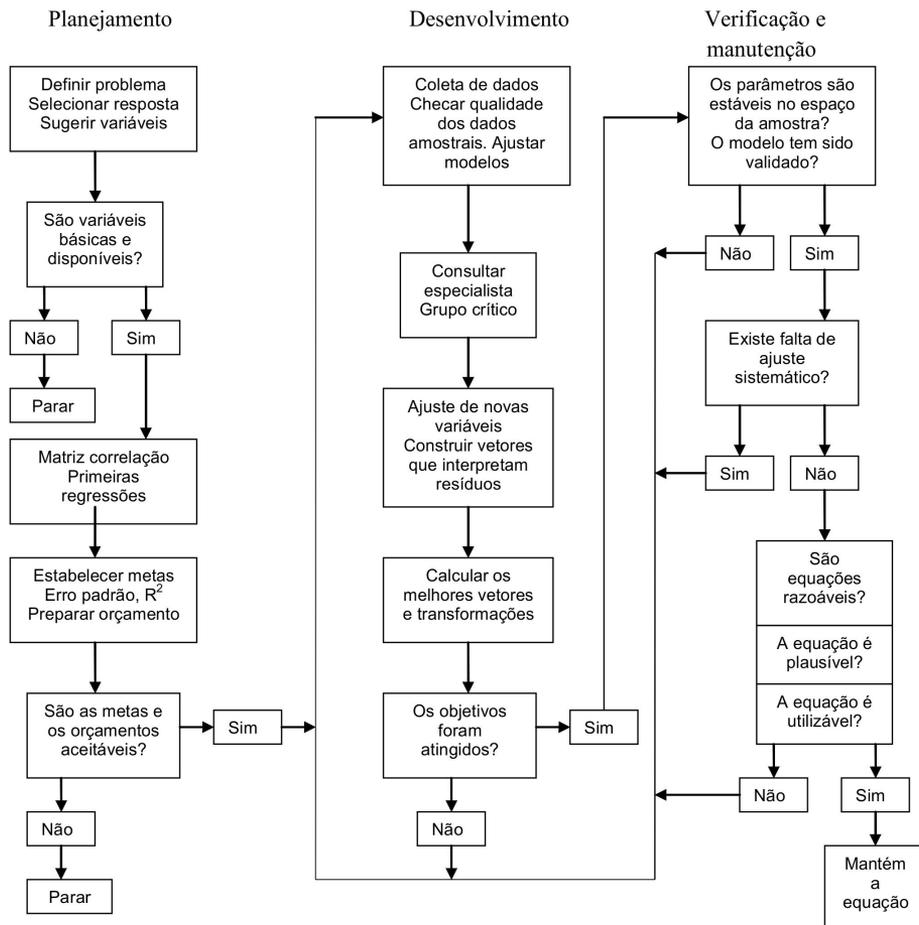
Segundo France e Thornley (1984) um modelo empírico tende, principalmente, a descrever um fenômeno, enquanto que um modelo mecanicístico trata de dar uma descrição com compreensão de um determinado fenômeno.

Os modelos mecanicísticos têm uma hipótese associada ao fenômeno descrito e servem para o entendimento de processos. Nesse tipo de modelo a floresta é vista como um sistema com ligações complexas entre os seus elementos, introduzindo mais funcionalidade na representação do crescimento e competição entre as populações, embora seu uso esclareça mais sobre a competição entre as espécies, por outro lado, são mais difíceis suas aplicações (SPATHELF; NUTTO, 2000).

Modelos baseados em processos constituem uma ciência em desenvolvimento crescente vinculada à fisiologia vegetal. Esse ramo de conhecimento tem evoluído, consideravelmente, nos estudos de interação planta x solo x atmosfera, conferindo uma visão mais generalista e, fisiologicamente, embasada para estimativa de crescimento (ABREU et al, 2002).

Um passo de extrema importância em modelagem é a sistemática de elaboração e seleção de modelos. Draper e Smith (1981) sugerem os seguintes passos (fluxograma 1).

Fluxograma 1. Etapas da elaboração e seleção de modelos



A análise de regressão tem sido utilizada com muita frequência no campo florestal, principalmente, porque permite se fazer estimativas de parâmetros da floresta com baixos custos, em curto espaço de tempo e precisas, desde que o conjunto de dados que gerou tal equação represente a população em consideração (SCHNEIDER, 1998).

Uma regressão quando utiliza apenas uma variável independente para explicar um fenômeno é denominada de regressão simples podendo ser linear ou não linear em função da natureza dos parâmetros no modelo. É considerada múltipla quando a variável dependente é estimada (explicada) por duas ou mais variáveis independentes.

As técnicas de regressão linear múltipla são muito úteis, mas também muito perigosas se usadas e interpretadas de forma imprópria.

Segundo Clutter (1963) uma equação de crescimento mesmo que apresente bons resultados em termos de ajuste a um determinado conjunto de dados, ela deve apresentar duas importantes características:

- a) convergência
- b) invariância

Por convergência se entende que quando o tempo final t_f tender para o tempo inicial t_i , o valor obtido para o crescimento final (W_f) deve ser igual ao obtido no tempo inicial (W_i).

Invariância por sua vez é a propriedade que uma equação possui de prever um valor futuro no tempo t_f sem depender de t_i .

Considere a hipótese de mortalidade proposta por Clutter e Jones (1980) que assume que a variação do número de árvores (N) sobreviventes no tempo (t) é proporcional a um número inicial de árvores elevada a uma potência θ vezes o tempo elevado a uma potência γ .

Assim sendo:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot N^\theta \cdot t^\gamma$$

$$\int_{N_i}^{N_f} \frac{dN}{N^\theta} = \alpha \int_{t_i}^{t_f} t^\gamma \cdot dt$$

$$\int_{N_i}^{N_f} N^{-\theta} \cdot dN = \alpha \cdot \frac{t^{\gamma+1}}{\gamma+1} \Big|_{t_i}^{t_f}$$

$$\frac{N^{-\theta+1}}{-\theta+1} \Big|_{N_i}^{N_f} = \alpha \cdot \frac{t^{\gamma+1}}{\gamma+1} \Big|_{t_i}^{t_f}$$

$$\frac{N_f^{-\theta+1} - N_i^{-\theta+1}}{-\theta+1} = \frac{\alpha}{\gamma+1} \cdot (t_f^{\gamma+1} - t_i^{\gamma+1})$$

Considere: $-\theta+1 = \beta_1$; $\frac{\alpha}{\gamma+1} = \beta_2$; $\gamma+1 = \beta_3$

$$\frac{N_f^{\beta_1} - N_i^{\beta_1}}{\beta_1} = \beta_2 (t_f^{\beta_3} - t_i^{\beta_3})$$

$$N_f^{\beta_1} - N_i^{\beta_1} = \beta_1 \cdot \beta_2 (t_f^{\beta_3} - t_i^{\beta_3})$$

Considere: $\beta_1 \cdot \beta_2 = \beta_4$

$$N_f^{\beta_1} = \beta_4 \cdot (t_f^{\beta_3} - t_i^{\beta_3}) + N_i^{\beta_1}$$

$$N_f^{\beta_1} = N_i^{\beta_1} + \beta_4 \cdot (t_f^{\beta_3} - t_i^{\beta_3})$$

$$N_f = \left[N_i^{\beta_1} + \beta_4 (t_f^{\beta_3} - t_i^{\beta_3}) \right]^{\frac{1}{\beta_1}}$$

Para ser compatível é necessário que quando $t_i = t_p$, $N_i = N_f$.

$$N_f = \left[N_i^{\beta_1} + \beta_4 (t_f^{\beta_3} - t_f^{\beta_3}) \right]^{\frac{1}{\beta_1}}$$

$$N_f = \left[N_i^{\beta_1} + 0 \right]^{\frac{1}{\beta_1}} = N_i$$

$$N_f = N_i$$

Confirmando a propriedade da convergência.

Para provar a invariância basta derivar a função de N_f em relação a t_p e o resultado não deve conter t_i .

$$N_f^{\beta_1} = N_i^{\beta_1} + \beta_4 \cdot (t_f^{\beta_3} - t_i^{\beta_3})$$

$$\frac{d \cdot N_f^{\beta_1}}{d \cdot t_f} = \varphi + \beta_4 \cdot \beta_3 \cdot t_f^{\beta_3 - 1}$$

Que não depende de t_i , sendo, portanto invariante.

Outra maneira de provar esta propriedade é considerar N em dois tempos (t) distintos.

$$N_i^{\beta_1} = N_{i-1}^{\beta_1} + \beta_4 (t_i^{\beta_3} - t_{i-1}^{\beta_3}) \quad (1)$$

$$N_{i+1}^{\beta_1} = N_i^{\beta_1} + \beta_4 (t_{i+1}^{\beta_3} - t_i^{\beta_3}) \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), tem-se:

$$N_{i+1}^{\beta_1} = N_{i-1}^{\beta_1} + \beta_4 (t_i^{\beta_3} - t_{i-1}^{\beta_3}) + \beta_4 (t_{i+1}^{\beta_3} - t_i^{\beta_3})$$

$$N_{i+1}^{\beta_1} = N_{i-1}^{\beta_1} + \beta_4 \cdot t_i^{\beta_3} - \beta_4 \cdot t_{i-1}^{\beta_3} + \beta_4 \cdot t_{i+1}^{\beta_3} - \beta_4 \cdot t_i^{\beta_3}$$

$$N_{i+1}^{\beta_1} = N_{i-1}^{\beta_1} + \beta_4 \cdot t_{i+1}^{\beta_3} - \beta_4 \cdot t_{i-1}^{\beta_3}$$

$$N_{i+1}^{\beta_1} = N_{i-1}^{\beta_1} + \beta_4 \cdot (t_{i+1}^{\beta_3} - t_{i-1}^{\beta_3})$$

Que não depende de t_i , sendo, portanto convergente e invariante.

MODELOS DE CRESCIMENTO EM FLORESTAS

Segundo Prodan (1968) nas Ciências Florestais, tais como Biologia, Sociologia e Economia, um grande número de tentativas tem sido feito para exprimir o crescimento como fórmulas matemáticas. As tentativas em florestas estão, provavelmente, entre as primeiras: Spath em 1797, Hossfeld em 1822 e Smalian em 1837.

Segundo Spurr (1952), os estudos de crescimento e produção de florestas iniciaram na Europa, no final do século XVIII. Dessa época até os dias atuais, muitos trabalhos foram desenvolvidos.

A diferença principal entre um modelo empírico e um modelo biológico é que o termo anterior recorre a uma expressão matemática de uma relação entre variáveis que podem ser esperadas logicamente enquanto um modelo biológico é uma expressão de uma hipótese lógica relativo à biologia do processo de crescimento (PIENAAR, 1965).

Nas ciências biológicas, as funções de crescimento têm sido usadas por muitos anos, principalmente, para prover dados do crescimento de um organismo ou parte de um organismo em um determinado tempo. O termo função de crescimento é geralmente usado para denotar uma função analítica que pode ser descrita em uma equação simples.

Na literatura da biologia matemática, crescimento total é sinônimo de crescimento cumulativo ou a soma de incremento contínuo. Uma equação de crescimento cumulativa deve ser expressa como uma função de tempo, ou idade, e tem que conter um parâmetro que especifica as condições iniciais.

Modelo de Mitscherlich

No início do século, Mitscherlich utilizou um princípio usado na economia (a produção se aproxima de um limite e o incremento na produção tende a zero), traduzindo-o em termos de crescimento biológico como “Lei dos efeitos dos fatores de crescimento” (SILVA, 1986).

Essa lei diz que a taxa de crescimento dw/dt é proporcional a diferença entre o tamanho máximo (último nível de crescimento ou termo assintótico) e o próprio parâmetro de crescimento.

$$\frac{dW}{dt} = c(U - W)$$

$$\frac{dW}{U - W} = c \cdot dt$$

$$\int \frac{dW}{U - W} = c \int dt$$

$$-\ln(U - W) = ct + k$$

$$\ln(U - W) = -ct - k$$

$$U - W = \exp(-ct - k)$$

$$U - W = U \exp(-ct)$$

$$W = U [1 - \exp(-ct)]$$

Se vários efeitos de (n) fatores são considerados a expressão passa a ser:

$$W = U [1 - \exp(-c_1 t)] \cdot [1 - \exp(-c_2 t)] \cdots [1 - \exp(-c_n t)]$$

Resultando em:

$$W = U \cdot [1 - \exp(-c' \cdot t)]^n$$

Em que:

$$c' = c_1 = c_2 = \dots = c_n$$

t = tempo

O desenvolvimento das funções tem ocorrido principalmente nas ciências florestais, como o que ocorreu na generalização de Chapman-Richards para o modelo de Von Bertalanffy (1951) e trabalhos de Prodan (1968) dando um tratamento compreensivo de várias funções de crescimento e leis de crescimento que já têm sido estudadas com referência ao crescimento florestal.

Modelo de Schumacher

O uso de modelos matemáticos para descrever o crescimento em altura tem se tornado muito comum hoje em dia. Entre os vários modelos disponíveis, a equação de Schumacher (1939) tem sido usada, extensivamente, com sucesso em muitos trabalhos.

A hipótese de crescimento usada foi que: “o crescimento em porcentagem varia inversamente com a idade”, sendo matematicamente expressa por:

$$\frac{dV}{V} = k d\left(\frac{1}{I}\right)$$

Em que:

V = volume

I = idade

k = parâmetro peculiar ao índice de sítio, densidade e estoque considerado.

Já com relação ao crescimento em altura a hipótese é a seguinte: O crescimento em altura é inversamente proporcional ao quadrado da idade:

$$\frac{dH}{dI} = \frac{\beta H}{I^2}$$

$$\frac{dH}{H} = \frac{\beta \cdot dI}{I^2} \rightarrow \frac{dH}{H} = \beta \cdot I^{-2} \cdot dI$$

$$\int_{H_i}^{H_f} \frac{dH}{H} = \beta \cdot \int_{I_i}^{I_f} I^{-2} \cdot dI$$

$$\ln H_f - \ln H_i = -\beta \cdot \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_i} \right)$$

$$H_f = H_i \cdot e^{-\beta \left(\frac{1}{I_f} - \frac{1}{I_i} \right)}$$

Em que:

H_f = altura no final do período;

H_i = altura no início do período considerado;

I_f = idade no final do período;

I_i = idade no início do período;

β = parâmetro do modelo.

Quando $I_f = I_i$, então $H_f = H_i$, conseqüentemente o modelo admite a propriedade de convergência.

Considere o período que vai de I_1 a I_2 .

$$H_2 = H_1 \cdot e^{-\beta \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right)}$$

$$H_3 = H_2 \cdot e^{-\beta \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right)}$$

$$H_3 = H_1 \cdot e^{-\beta \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right)} \cdot e^{-\beta \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right)}$$

$$H_3 = H_1 \cdot e^{-\beta \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right)}$$

$$H_3 = H_1 \cdot e^{-\beta \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right)}$$

É possível calcular H_3 a partir de H_1 sem depender de H_2 , conferindo ao modelo a propriedade de invariância.

Modelo de Von Bertalanffy

Von Bertalanffy (1957) derivou seu modelo de estudos das então chamadas relações alométricas dos organismos. A relação alométrica será compreendida por existir entre elementos dimensionais de um organismo, denominado P e Q, quando a relação entre eles pode ser expressa na forma:

$$P = \alpha \cdot Q^0$$

Em que:

P = comprimento do fêmur do animal;

Q = largura do crânio de certas espécies animais ou a área fotossintética e área do câmbio do tronco de espécies vegetais;

α e θ = parâmetros da relação.

Isto sugere a suposição de que em indivíduos normais, o padrão de crescimento específico de P produzirá uma relação proporcional constante para o padrão de crescimento específico de Q, que é:

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{\alpha}{Q} \right) \cdot \frac{dQ}{dt}$$

Estudos extensivos de muitos organismos aquáticos e terrestres levaram Bertalanffy à conclusão de que para uma classe principal de organismos a relação alométrica entre a área da superfície (também total, ou área absorptiva total) e volume total pode ser adequadamente expresso como:

$$S = \alpha \cdot V^{2/3}$$

Em que S é área da superfície, V é o volume do organismo, α é o parâmetro a ser calculado e $2/3$ é constante alométrica.

Após prosseguimento dos estudos, o autor chegou à conclusão de que o crescimento segue um processo de síntese (anabolismo) e degradação (catabolismo). A fórmula original foi expressa da seguinte forma:

$$\frac{dW}{dt} = \eta W^{2/3} - kW$$

A vantagem desta equação diferencial está na sua fundamentação teórica. A razão anabólica é proporcional à área da superfície do organismo, enquanto que a razão catabólica é proporcional ao volume da biomassa.

Modelo de Chapman-Richards

Richards (1959) estudando o crescimento de plantas e Chapman (1961) o crescimento de peixes, consideraram que a constante alométrica de $2/3$ de Von Bertalanffy era muito restritiva. Esse expoente pode assumir diferentes valores dependendo da natureza da população (SILVA, 1986).

A generalização de Chapman-Richards do modelo de crescimento de Von Bertalanffy é uma expressão matemática de uma hipótese concernente a causas essenciais do fenômeno de crescimento, de tal modo que os parâmetros no modelo têm pelo menos uma total interpretação biológica ou fisiológica

(PIENAAR e TURNBULL, 1973).

Assim sendo, fazendo esta modificação obtém-se:

$$\frac{dH}{dt} = \alpha H^m - \gamma H$$

Após resolução desta equação diferencial o resultado é:

$$H = U \{1 - \beta \exp[-\kappa(t - t_0)]\}^{1/(1-\mu)} + \varepsilon_i$$

Quando $t_0 = 0$

$$H = U \{1 - \beta \exp[-\kappa t]\}^{1/(1-\mu)} + \varepsilon_i$$

Em que:

U = valor assintótico do modelo;

β , κ e μ = parâmetros do modelo;

ε_i = erro aleatório.

Este modelo foi nomeado como modelo de crescimento de Chapman-Richards por Turnbull (1963) e tem sido usado frequentemente em pesquisas florestais (PIENAAR, 1965; MACHADO, 1978; CAMPOS, 1980; CLUTTER, 1983; BARROS et al, 1984; MACTAGUE, 1985; SILVA, 1986; SCOLFORO, 1994; FEKEDULENG et al, 1999).

Dependendo do valor do parâmetro μ , o modelo de Chapman-Richards representa várias leis de crescimento: o modelo de Bertalanffy ($\mu = 2/3$), a função de crescimento Monomolecular ($\mu = 0$), a função de crescimento Gompertz ($\mu = 1$) e a função de crescimento Logístico ($\mu = 2$), que são casos especiais da função de crescimento de Chapman-Richards (MACHADO, 1978).

Modelo de Silva-Bailey

Silva (1986) estudando o crescimento de *Pinus elliottii* Engelm var. *elliottii* em função de diferentes fontes de nutrientes, considerou a idéia de dinâmica de populações proposta por Leslie (1945) que diz que para qualquer distribuição arbitrária no tempo i , a estrutura de uma população pode ser expressa na forma de $n + 1$ equações lineares, em que de n para $n + 1$ é o último grupo

de idade na tabela de distribuição etária.

O modelo expressa o tamanho da população (W_{i+n}) no tempo $i + n$ como função do tamanho da população no tempo i (w_i), da taxa de sobrevivência (S), do número médio de recrutamentos (F) produzido na população no tempo i . Sua expressão é:

$$W_{i+n} = W_i (SF)^n$$

Em populações florestais o problema de recrutamento (nascimento ou imigração) no período de investigação é desprezível, bem como migração, que são fenômenos comuns em populações animais (móveis). Ocorre mortalidade, mas essa pode ser mais bem estimada que em populações móveis. Dessa forma Silva (1986) considerou o plantio de *Pinus elliottii* como uma população fechada e o parâmetro S sendo retirado do modelo.

O parâmetro S é desconhecido e depende da taxa de mortalidade, que pode ser regular ou irregular (BURKHART, 1974). Mortalidade regular é resultante de fatores tais como densidade de plantio, qualidade do sítio, tratamentos silviculturais, etc, enquanto que mortalidade irregular é devida a eventos catastróficos como fogo, doenças, pragas, ventos, etc.

Em populações animais, geralmente o parâmetro S é estimado pelos modelos de Beverton, Ricker e Schaefer (SILVA, 1986), que são expressos como:

- Beverton

$$W_f = W_i (\alpha + \beta \cdot W_i)^{-t_f}$$

- Ricker

$$W_f = W_i [\alpha \cdot \exp(-\beta \cdot W_i)]^{t_f}$$

- Schaefer

$$W_f = W_i (\alpha - \beta \cdot W_i)^{t_f}$$

Estes modelos foram ajustados no plantio de *Pinus elliottii* e em todas as situações analisadas, a estimativa do parâmetro β não diferiu de zero, reduzindo todos os modelos a:

$$W_f = W_i \alpha^t$$

Que sugeriu a equação diferencial

$$\frac{dW}{dt} = \gamma W \alpha^t \quad (1)$$

Que se traduz por: a taxa de crescimento ou mortalidade é proporcional a uma condição inicial vezes uma função exponencial da idade (t).

A solução para (1) é a seguinte:

$$\frac{dW}{dt} = \gamma W \alpha^t$$

$$\frac{dW}{W} = \gamma \alpha^t dt$$

$$\int_{w_i}^{w_f} \frac{dW}{W} = \gamma \int_{t_i}^{t_f} \alpha^t dt$$

$$\ln W \Big|_{w_i}^{w_f} = \gamma \frac{\alpha^t}{\ln \alpha} \Big|_{t_i}^{t_f}$$

Considerando $\frac{\gamma}{\ln \alpha} = \kappa$ tem-se que:

$$\ln W \Big|_{w_i}^{w_f} = \kappa \alpha^t \Big|_{t_i}^{t_f}$$

$$\ln W_f - \ln W_i = \kappa (\alpha^{t_f} - \alpha^{t_i})$$

$$\ln W_f = \ln W_i + \kappa (\alpha^{t_f} - \alpha^{t_i})$$

$$W_f = W_i e^{\kappa(\alpha^{t_f} - \alpha^{t_i})}$$

Quando comparados os modelos de Silva-Bailey e Chapman-Richards apresentam estimativas semelhantes, quer seja de mortalidade ou crescimento em área basal.

Exemplos de modelos utilizados nas análises de crescimento e mortalidade (sobrevivência) florestal:

- Chapman – Richards

$$H_f = H_i \left[\frac{1 - e^{\kappa T_f}}{1 - e^{\kappa T_i}} \right]^\beta + \varepsilon_i$$

- Von Bertalanffy

$$H_f = H_i \left[\frac{1 - e^{\kappa T_f}}{1 - e^{\kappa T_i}} \right]^{3.0} + \varepsilon_i$$

- Monomolecular

$$H_f = H_i \left[\frac{1 - e^{\kappa T_f}}{1 - e^{\kappa T_i}} \right] + \varepsilon_i$$

- Logística

$$H_f = H_i \left[\frac{1 - e^{\kappa T_i}}{1 - e^{\kappa T_f}} \right] + \varepsilon_i$$

- Brody

$$H_f = H_i - \beta \left[e^{\kappa T_f} - e^{\kappa T_i} \right] + \varepsilon_i$$

- Johnson

$$H_f = H_i + e^{\kappa T_f} - e^{\kappa T_i} + \varepsilon_i$$

- Silva – Bailey

$$H_f = H_i e^{\beta(\kappa T_f - \kappa T_i)} + \varepsilon_i$$

- Mitcherlich

$$H_f = H_i - \beta(\kappa T_f - \kappa T_i) + \varepsilon_i$$

- Weibull

$$H_f = H_i - \beta \left(e^{-\kappa \cdot T_f^\varphi} - e^{-\kappa \cdot T_i^\varphi} \right) + \varepsilon_i$$

- Clutter e Jones

$$H_f = \left[H_i^\theta + \beta_1 \left(T_f^\kappa - T_i^\kappa \right) \right]^{\frac{1}{\theta}} + \varepsilon_i$$

Em que:

H_f = altura final estimada;

H_i = altura inicial observada;

β , φ , θ e κ = constantes;

T_i e T_f = tempo inicial e final das medições das alturas do experimento;

ε_i = erro aleatório.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABREU, E. C. R. et al. Modelagem para prognose precoce do volume por classe diamétrica para *Eucalyptus grandis*. **Scientia Forestalis**, Piracicaba, n. 61, p. 86-102, 2002.

BARROS et al. Análise do crescimento de *Eucalyptus saligna* em solos do cerrado sob diferentes níveis de N, P e K no vale do Jequitinhonha, MG. **Instituto de Pesquisa Engenharia Florestal**, Piracicaba, n. 26, p.13-17, 1984.

BERTALANFFY, L. Von. Quantitative laws for metabolism and growth. **Quarterly Review of Biology**, Stony Brook, v. 32, p. 217-231, 1957.

BERTALANFFY, L. Von. **General system theory: foundations, development, applications**. New York: George Braziller, 1969. 295 p.

CAMPOS, J. C. C. Análise do crescimento e produção em plantações desbastadas. **Revista Árvore**, Belo Horizonte, n. 4, p. 157-169, 1980.

CHAPMAN, D. E. Statistical problems in dynamics of exploited fishing populations. In: BERKELEY SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL STATISTIC AND PROBABILITY, 1961, p. 153 – 158, **Procededings...** [S.l.: s.n.], 1961.

CLUTTER, J. L. et al. **Timber management: a quantitative approach**. New York: John Wiley & Sons, 1983. 333 p.

CLUTTER, J. L. Compatible growth and yield models for loblolly pine. **Forest Science**, Bethesda, v. 9, p. 354-371, 1963.

CLUTTER, J. L.; JONES, E. P. **Prediction of growth after thinning in old-field slash pine plantation**. Washington, D.C. USDA, 1980. 12 p.

DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. New York: John Wiley e Sons, 1981. 709 p.

FEKEDULEGN, D. et al. Parameter estimation of nonlinear growth models in forestry. **Silva Fennica**, Helsinki, v. 33, n. 4, p. 327-336, 1999.

FERREIRA, A. B. de H. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa**, 3. ed. Curitiba: Ed. Positivo, 2004. 2120 p.

FRANCE, J.; THORNLEY, J. H. M. **Mathematical models in agriculture**. London: Butterworks, 1984. 335 p.

HANNON, R; RUTH, M. **Modeling dynamic biological systems**. New York: Springer Verlag, 1997. 399 p.

LESLIE , P.H. On the use of matrices in certain populations mathematics **Biometrika**, London, v. 35, p. 183 – 212 , 1945.

MACHADO, S. A. **Studies in growth and yield estimation for Pinus taeda L. plantations in the State of Parana – Brazil**. 1978. 170 f. Thesis (Doctor of Philosophy) – University of Washington, Washington.

McTAGUE, J. P. **Growth and yield of slash and loblolly pine in the state of Santa Catarina, Brazil**. 219 f. 1985. Dissertation of Ph.D. School of Forest Research - University of Georgia, Athens.

PIENAAR, L. V.. **Quantitative theory of forest growth**. 1965. 167f. Thesis (Doctor of Philosophy) University of Washington, Washington.